



TITLE:

不完全データを伴う大規模AHP (決定理論とその関連分野)

AUTHOR(S):

八巻, 直一; 関谷, 和之

CITATION:

八巻, 直一 ...[et al]. 不完全データを伴う大規模AHP (決定理論とその関連分野). 数理解析研究所講究録 1998, 1043: 143-154

ISSUE DATE:

1998-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/62120>

RIGHT:

不完全データを伴う大規模 AHP

静岡大学 八巻直一 Naokazu YAMAKI

静岡大学 関谷和之 Kazuyuki SEKITANI

概要

従来の AHP は全一対比較を行うことが前提である。欠落データを有する場合、不完全データとして扱われている。しかし、欠落データの存在は例外的でなく、評価項目、代替案の数が多いと本質的に存在する。本稿では、評価項目、代替案の数が多い場合に適用できるように AHP の枠組みを拡張した。拡張した AHP の枠組みを人事評価に適用し、その有効性を検証した。

1 はじめに

意思決定支援手法の 1 つである階層的分析法 AHP (Analytic Hierarchy Process) は、主観的評価を伴う評価項目間の相対比較、および代替案間の相対比較を定量化する手法として有効であることが知られている [15]。AHP では評価項目を階層化した上で、各層毎に評価項目間の一対比較値からなる一対比較行列 X から、各評価項目の重要度を算出する。評価項目数を n とし、評価項目 j に対する評価項目 i の重要度の比率を x_{ij} とすると、一対比較値 x_{ij} は一対比較行列 X の第 (i, j) 要素である。一対比較値の性質から $x_{ij} > 0$ かつ $x_{ij}x_{ji} = 1$ が成り立つ。もし、 X の要素について $x_{ij}x_{jk} = x_{ik}$ が成り立つならば、 X を完全整合行列であるという。

X が完全整合行列であれば、

$$X = W11^TW^{-1} \quad (1)$$

と表される。ここで、 1 はすべての要素が 1 である n 次元ベクトルである。また、 $W = \text{diag}(w_1, \dots, w_n)$ である。このとき、項目間の重要度の比は $w = (w_1, \dots, w_n)^T$ であり、 w を重要度ベクトルという。

w の推定方法に幾何平均法と固有ベクトル法が知られている [15]。

AHP では、評価項目を階層構造として与えることが重要である。もし、階層構造を持たないとすると、全一対比較値の数が n^2 のオーダーで増加し、すべての評価項目の間で一対比較を行うことは困難となる。しかも、評価項目が階層的にならず、多くの評価項目が 1 階層となる場合も現実にはあり得る。

AHP では、上のように複数の評価項目の重要度を算定することを第 1 段階とする。第 2 段階では、複数の代替案について各評価項目毎に一対比較を行う。次いで、代替案の一対比較行列から各代替案の重要度が、評価項目毎に決定される。評価項目数を m 、代替案の数を p 、評価項目 k についての代替案 l の重要度を g_k^l とし、評価項目 k の重要度を w_k とすると、代替案 l の総合評価 F^l は、次式で与えられる。

$$F^l = \sum_{k=1}^m w_k g_k^l, \quad l = 1, \dots, p. \quad (2)$$

評価項目の場合と異なり、代替案は本来的に階層構造をなさないもので、代替案の数が多いときには、すべての代替案間の一対比較の組み合わせの数はさらに爆発的に増加する。

複数の評価者と、多数の代替案のある例として人事評価が挙げられる。人事評価に対する AHP の適用は杉山、山田、八巻 [12] や八巻、嶋田 [17]、大村 [8] らによって行われている。仕事におけるワーカの成果はごく少数の例外を除いて、データだけで定量化されることはなく、成果の相当の部分が評価者の主観的評価に依存する。このことが、評価査定の柔軟性をもたらしている反面、被評価者の不満の原因でもある。したがっ

て、主観的評価を科学的に取り扱う AHP を適用できるならば、評価プロセスが被評価者にとってより透明で納得いくものとなり得るであろう。

しかしながら、人事評価を AHP の枠組みで捉えると、以下の 3 つの問題がある。

1. 評価者が複数人存在する。場合によって、評価者の数がかかなり多数となる。
2. 評価対象者（代替案に相当）が非常に沢山存在し、かつ異なる部署に別れているので、すべての評価対象者間の成果の一対比較は事実上不可能である。その理由として、上記の作業量の爆発ばかりでなく、たとえば仕事の種類が異なる評価対象者の間の一対比較は困難である、といったことも挙げられる。
3. ある評価対象者が、複数の評価者によって評価されることがある。たとえば、評価期間の途中で仕事の種類が変わった場合などに、そのような現象が起きる。

このような問題点から、人事評価に従来の AHP をそのまま適用することは不可能であり、以下のような機能が実現される必要がある。

1. 評価者が複数なので、複数の評価者の存在を前提としたモデルが実現されること。
2. 評価対象者が非常に多いため、全一対比較のごく一部が得られているにすぎないことを前提とした重要度の算出手法が確立されること。

従来の AHP をグループ意思決定に拡張する試みは、Saaty ら [1] や杉山ら [12] が行っているが、それらは全一対比較を前提としているため、そのまま流用することはできない。情報欠落に対する重要度ベクトルの推定についても、ハーカー法など [4, 13, 14] が知られているが、それらは全一対比較のごく一部が欠落している場合を想定している。全一対比較が与えられないことは、通常の AHP では不完全データであって情報欠落として処理されていたが、たとえば人事評価の例などでは情報欠落と考えるべきでなく、全一対比較が与えられることの方がむしろ例外的に起こる。人事評価の問題例は特殊なものではなく、たとえばネットワーク上でのグループウェアなどではむしろ普通に起こる問題といえよう。したがって、このような問題に適応可能とするような AHP の拡張は重要である。本稿では、評価者が複数であり、評価項目および代替案が多数であるような、大規模な問題に対して適用可能となるように AHP を拡張する。大規模な問題に適用するように拡張された手法を、ここでは「大規模 AHP」と呼ぶことにする。

以下、第 2 節では大規模 AHP の定義とモデルの構築について述べる。第 3 節では大規模 AHP の重要度ベクトルの導出方法とここで与えられた重要度ベクトルの導出法と幾何平均法との関係を述べる。第 4 節では人事評価への大規模 AHP の適用の事例を、第 5 節では、適用事例で想定できる制約条件を数理計画モデルと定式化することで大規模 AHP は取り込むことが可能であることを示す。最後に、大規模 AHP の枠組みに対して今後の研究課題を述べる。

2 大規模 AHP のモデル

本節では、大規模 AHP での一対比較値群を適切に表現する形式を論じる。従来から用いられてきた一対比較行列という形式ではなく、グラフ、ネットワークを利用した形式を提案する [16]。

2.1 大規模 AHP での一対比較の評価の方法

AHP では、評価者が同一階層での評価項目間の一対比較に対して、全一対比較を行うことが前提である。評価者が各評価項目に対して代替案間での一対比較する場合も同様である。本稿で提案する一対比較の評価法は以下の通りである。

大規模 AHP での一対比較による評価の方法： 各評価者が相対評価できる代替案（代替案）間のみの一対比較を行い、一対比較による相対評価を行わない代替案（代替案）間を許す。相対評価された代替案（代替案）間には一対比較値を割り当てる。

ここでの一対比較による相対評価は言葉による数段階の評価尺度であり、それぞれに段階の評価尺度に対してある正数を割り当てことで一対比較値とする。また、一対比較値の逆数対称性の仮定「代替案(代替案) i に対して j の一対比較値が x_{ij} であれば、代替案(代替案) j に対して i の一対比較値 x_{ji} は $x_{ji} = 1/x_{ij}$ であること」を仮定する。

2.2 一対比較グラフと評価項目ならびに代替案のグループ分割

以降で説明する一対比較値群の表現形式は、評価項目間の相対評価や各評価項目に対する代替案間の相対評価においても同一であるので、各評価項目に対する代替案間の相対評価で記述する。

評価者は L 人とし、代替案を n 個とする。このとき第 l 評価者が一対比較した代替案対の集合を

$$K_l = \{(i, j) \mid \text{代替案 } i, j (1 \leq i < j \leq n) \text{ は第 } l \text{ 評価者によって相対評価された.}\}$$

とする。第 l 評価者が代替案 i に対して代替案 j を一対比較した場合、その一対比較値を x_{ij}^l とする。

いずれかの評価者によって一対比較された代替案対の集合 K は $K = \bigcup_{l=1}^L K_l$ であり、また、いずれの評価者からも一対比較されなかった代替案対の集合 \bar{K} は

$$\bar{K} = \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n\} \setminus K \quad (3)$$

である。 $\bar{K} \neq \emptyset$ であれば、一対比較されなかった代替案の組みが存在し、逆も成り立つ。本稿では各評価者が一対比較しない代替案間の存在も許すので、 $\bar{K} \neq \emptyset$ となる場合もありえる。そこで、全代替案間の中で一対比較された代替案対を示すために、代替案 i を点 i に対応させて、点集合 $V = \{1, \dots, n\}$ と有向な並列枝の集合 E から構成されるグラフ $G = (V, E)$ を考える。ここで、各枝は各評価者 $l = 1, \dots, L$ 毎に代替案 i, j が $(i, j) \in K_l$ であれば、またその時に限り点 i から点 j へ枝を結ぶこととで与えられる。このグラフを一対比較グラフ G と呼ぶ。

第 l_1 評価者と第 $l_2 (\neq l_1)$ 評価者が重複して代替案 $i, j (i < j)$ を一対比較したならば、グラフ G で点 i から点 j への枝は2本以上存在する。したがって一対比較グラフ G の枝数は $|E| = \sum_{l=1}^L |K_l| \geq |K|$ である。 $|K| < |E|$ であれば、ある代替案の組みに対して重複評価が存在し、逆も成り立つ。通常のAHPでは、単独の評価者により全代替案対に対して重複無く一対比較を行う。この場合を一対比較グラフで考えると、一対比較グラフ G は並列枝を含まない完全グラフに相当する。つまり、一対比較グラフ G では $|K| = |K_1| = |E| = n(n-1)/2$ である。

いずれかの評価者により一対比較された代替案 i, j に対して、グラフ G では点 i と点 j を結ぶ枝が存在している。枝の始点と終点に対応する代替案は直接比較されたと呼ぶ。グラフ G で2本以上の枝を含む道により結ばれる点対が存在した場合、この点対に対応する代替案は間接比較されたと呼ぶ。つまりグラフ G の連結成分内の各点対に対応する代替案対は直接比較、もしくは間接比較されており、相異なる連結成分間に含まれる点対は直接比較、間接比較されていない。グラフ G の同一連結成分内に含まれる点に対応する代替案は同一グループに分類することで、全代替案はグループに分割される。そこで、第1段階では同一グループ内の代替案の重要度を算出し、もし2つ以上の連結成分がグラフ G に含まれており、かつ、相異なるグループに含まれる代替案間での重要度が必要であれば、第2段階としてグループ間での評価を行う。このような2段階の評価を提案する。なお、連結成分の抽出には点対点の接続関係を示すグラフ G の $n \times n$ の隣接行列 N を作成してべき乗法[5]を適用したり、グラフ G での全点対間の最短路問題に対するWarshall-Floyd法[3, 19]を利用すればよい。

2.3 一対比較ネットワークと誤差モデル

枝で点対が結ばれている関係を示す一対比較グラフ G の接続行列を $A \in R^{n \times |E|}$ とする。

簡単な例題を用いて、大規模AHPの一対比較の評価の構造を明らかにする一対比較グラフと、その接続行列の関係を示す。

例題 1 2 人の評価者が 5 個の代替案 $\{1, \dots, 5\}$ について, $K_1 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 5)\}$, $K_2 = \{(1, 4), (3, 4), (4, 5)\}$ を得た. それぞれの評価の一对比較値は x_{ij}^l , $(i, j) \in K_l$, $l = 1, 2$ である.

例題 1 の場合の一对比較グラフ G と接続行列 A をそれぞれ図 1 と表 1 に示す. 第 1 評価者と第 2 評価者と

表 1: 例題 1 の一对比較グラフの接続行列 A

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

表 2: 例題 1 の一对比較グラフのカットベクトル b

$$b = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{12}^1 \\ \tilde{x}_{13}^1 \\ \tilde{x}_{14}^2 \\ \tilde{x}_{24}^1 \\ \tilde{x}_{34}^1 \\ \tilde{x}_{34}^2 \\ \tilde{x}_{35}^2 \\ \tilde{x}_{45}^2 \end{bmatrix}$$

もに代替案 3, 4 の一对比較をしたので, 始点を点 3, 終点を点 4 とする枝が 2 本存在する.

「単独の評価者 ($L = 1$) により全代替案に対して一对比較することで得た一对比較値 x_{ij}^1 ($1 \leq i, j \leq n$) が完全整合した場合, かつその時に限り, $w_i/w_j = x_{ij}^1$ $1 \leq i, j \leq n$ となる代替案の重要度ベクトル $w = (w_1, \dots, w_n)^T$ が存在する。」ということが知られている. そこで, この事実から類推して, 代替案のある重要度ベクトル $w = (w_1, \dots, w_n)^T$ に対して, 各評価者 $l = 1, \dots, L$ による一对比較値 x_{ij}^l , $(i, j) \in K_l$ は $w_i/w_j = x_{ij}^l$ である場合が理想的な一对比較値であると考え. つまり, 評価された一对比較値 x_{ij}^l はある重要度の比 w_i/w_j から偶然誤差によって乖離が以下のように生じているものと仮定する.

$$\frac{w_i}{w_j} = x_{ij}^l \epsilon_{ij}^l \quad (4)$$

ここで, ϵ_{ij}^l は誤差項である.

本稿では, 正数 z を対数変換した値を $\tilde{z} = \log z$ とする. また正の要素からなるベクトル \mathbf{z} に対して, \mathbf{z} の各要素を対数変換して得られるベクトルを $\tilde{\mathbf{z}}$ とする. (4) の両辺に対数変換を行うと

$$\tilde{w}_i - \tilde{w}_j = \tilde{x}_{ij}^l + \epsilon_{ij}^l \quad (5)$$

である. 一对比較値の逆数対称性の仮定 $x_{ij}^l = 1/x_{ji}^l$ により $\tilde{x}_{ij}^l = -\tilde{x}_{ji}^l$, さらに式 (4) から $\epsilon_{ij}^l = 1/\epsilon_{ji}^l$, すなわち $\epsilon_{ij}^l = -\epsilon_{ji}^l$ となる. 従って (5) は $1 \leq i < j \leq n$ の範囲で考えればよい.

$|E|$ 次元ベクトル b を接続行列 A の列に割り当てられた枝の並びに沿って \tilde{x}_{ij}^l を並べたベクトルとする. b は一般に一对比較グラフ G のカットベクトルと呼ばれている.

各評価者 $l = 1, \dots, L$ が代替案対 $(i, j) \in K_l$ に与えた評価が x_{ij}^l であれば, 一对比較グラフ G の点 i から点 j への枝の容量は \tilde{x}_{ij}^l とする. これらの容量 \tilde{x}_{ij}^l , $(i, j) \in K_l$ ($l = 1, \dots, L$) を含めた一对比較グラフ G を一对比較ネットワーク \mathcal{N} と呼ぶ. 例題 1 の一对比較ネットワーク \mathcal{N} とカットベクトル b をそれぞれ図 2, 表 2 で与える. 一对比較ネットワーク \mathcal{N} の接続行列 A とカットベクトル b を利用することにより, 誤差モデル (5) は以下のように与えることができる.

$$A^T \tilde{w} = b + \epsilon \quad (6)$$

ここで $\tilde{w} = (\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_n)^t$, $\epsilon \in R^{|E|}$ は接続行列の列に割り当てられた枝の並びに沿って誤差項 ϵ_{ij}^l を並べた誤差ベクトルである.

重要度ベクトルを求めるために, 誤差最小化問題 (7) を解くことを考える.

$$\min \|A^T \tilde{w} - b\| \quad (7)$$

問題 (7) は, 一对比較ネットワーク \mathcal{N} の上で以下のように解釈できる.

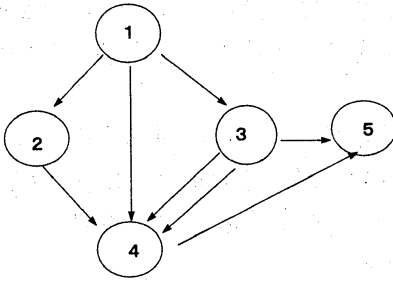


図 1: 例題 1 の一対比較グラフ

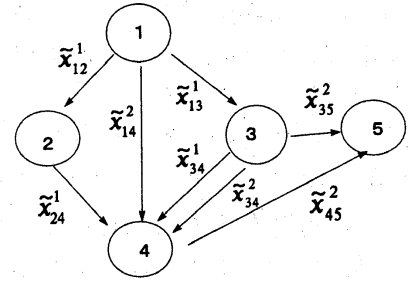


図 2: 例題 1 の一対比較ネットワーク

「 x_{ij}^l を点*i*と点*j*間の標高差の観測値と考えれば、各標高差 x_{ij}^l , $(i, j) \in K_l (l = 1, \dots, L)$ に最も適合するように各点*i*の標高 \tilde{w}_i を推定する。」

一対比較グラフ G が複数の連結成分から構成されている場合、問題 (7) は連結成分により分割した代替案のグループ毎に分割できることを次の性質で述べる。

性質 2.1 一対比較グラフ G が m 個の連結成分から構成されていると仮定する。各 $i = 1, \dots, m$ に対して第 i 連結成分に含まれる点集合を V_i 、枝集合を E_i とする。各部分グラフ $G_i = (V_i, E_i)$, $i = 1, \dots, m$ の接続行列を $A_i \in R^{|V_i| \times |E_i|}$ 、それぞれのカットベクトルを b_i とすると、

$$\min \|A^T w - b\| = \sum_{i=1}^m \min \|A_i^T w^i - b_i\| \quad (8)$$

である。ここで、 $w^i \in R^{|V_i|}$, $i = 1, \dots, m$ である。

証明: 一般性を失うことなく一対比較グラフ G は 2 つの連結成分から構成されているものとする。一対比較グラフ G の接続行列 A はその行を適当に並び替えることにより $\begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 \end{bmatrix}$ となる。一対比較グラフ G のカットベクトル b は接続行列 A の行の並び替えと同様な並び替えを b の要素に対して行うと $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ とすることができる。従って、

$$\begin{aligned} \min \|A^T w - b\| &= \min \left\| \begin{bmatrix} A_1^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^1 \\ w^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \right\| \\ &= \min \left\| \begin{bmatrix} A_1^T w^1 - b_1 \\ A_2^T w^2 - b_2 \end{bmatrix} \right\| \\ &= \min \{ \|A_1^T w^1 - b_1\| + \|A_2^T w^2 - b_2\| \} \\ &= \min \|A_1^T w^1 - b_1\| + \min \|A_2^T w^2 - b_2\|. \end{aligned}$$

□

性質 2.1 より、連結成分に対応した代替案のグループ毎に問題 (7) を解くことで、各グループ毎に独立してグループ内の代替案の重要度ベクトル決定が可能となる。そこで、以降では一対比較グラフ G は連結であると仮定して、問題 (7) の解き方については第 3 節で提案する。さらに、各グループ間の評価と全体に対するグループの重要度の決定法は第 5 節で議論する。

「一対比較行列から重要度ベクトルを算出するにあたり固有ベクトル法が絶対的である。」ということに関して様々な議論 [7, 11, 10] がある。仁科, 柴山 [7] は「並列枝を含まない完全グラフ G の場合の問題 (7) でノ

ルムを L_2 ノルムとした時の最適解は、一対比較行列に対する重要度ベクトル算出法の一つである幾何平均法から得られた重要度ベクトルと一致する。」事実を指摘している。さらに「幾何平均法で得た重要度ベクトルに対する固有ベクトル法での重要度ベクトルの優位性が必ずしも成立しない。」ことを幾つかの数値実験により明らかにしている。

欠落データを含む一対比較行列に対する重要度算出法の中で固有ベクトル法に対応するものはハーカー法など数多く提案されている。しかし、欠落データを含む一対比較行列に対する重要度算出法で幾何平均法に対応するものは現在までに知られていない。本稿で提案する問題 (7) に対する解法は欠落データに対する一対比較行列に対する重要度算出法で幾何平均法に対応するものである。

なお、通常の AHP における幾何平均法と固有ベクトル法の優位性と同様、欠落データに対する重要度算出法の優位性に関しては十分議論されるべき重要な課題である。しかし、この課題は本稿の主旨である「大規模 AHP のフレームワークの提案」から外れるので、本稿では言及しない。

3 大規模 AHP の重要度ベクトルの導出

$\|\cdot\|$ をユークリッドノルム $\|\cdot\|_2$ とすると、問題 (7) の最適解 \tilde{w} は次の正規方程式の解として得られる。

$$AA^T \tilde{w} = Ab \quad (9)$$

接続行列 A のランクは $\text{rank } A = n - 1$ であり、 $\mathbf{0}$ をすべての要素が 0 の n 次元ベクトルと記すと、 $A^T \mathbf{1} = \mathbf{0}$ である。したがって、式 (9) の解は一意ではない。このとき、次の補題が成り立つ。

補題 3.1 ([2] の定理 1(P.104)) 任意行列 A に対して $A^T M A^T = A^T$, $(A^T M)^T = A^T M$ を満足する行列 M が存在し、 $\min \|A^T \tilde{w} - b\|_2$ の一般解は

$$\tilde{w} = Mb + \{I - MA^T\}y, \quad (10)$$

で与えられる。ただし、 $y \in R^{|E|}$ は任意の実数値ベクトルである。

これより、次の結果が得られる。

定理 3.2 問題 (7) に対して、 $AA^T + \mathbf{1}\mathbf{1}^T$ は正則行列であり、

$$Q = (AA^T + \mathbf{1}\mathbf{1}^T)^{-1}A$$

とおくと、式 (9) の一般解 \tilde{w} は次式で与えられる。

$$\tilde{w} = Qb + \frac{\tilde{\alpha}}{n}\mathbf{1}, \quad (11)$$

ただし、 $\tilde{\alpha}$ は任意の実数である。

証明: $\text{rank } A = n - 1$ で、かつ A の各列は $\mathbf{1}$ と直交するので、 $AA^T + \mathbf{1}\mathbf{1}^T$ は正則である。したがって、 $Q = (AA^T + \mathbf{1}\mathbf{1}^T)^{-1}A$ とおくと、

$$QA^T = I - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^T, A^T QA^T = A^T, (A^T Q)^T = A^T Q$$

が成り立つ。また、任意の $y \in R^{|E|}$ に対して、

$$\{I - QA^T\}y = \{I - (I - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^T)\}y = \frac{\mathbf{1}^T y}{n}\mathbf{1}$$

なので、 $\tilde{\alpha} = \mathbf{1}^T y$ とおけば式 (11) が得られる。 □

本稿では、式 (11) で与えられる \tilde{w} を $\tilde{\alpha}$ -重要度ベクトルと呼び、逆対数変換したベクトル w を α -重要度ベクトルと呼ぶことにする。

式 (11) において、係数行列 Q は一対比較グラフの構造によってのみ決定される。 $AA^T + \mathbf{1}\mathbf{1}^T$ の第 i 対角要素は (点 i に接続している枝の数 + 1) であり、点 i から点 j へ枝で結ばれているなら第 (i, j) 要素は 0, 点 i から点 j へ枝が無ければ、第 (i, j) 要素は 1 である。したがって、 Ab の第 i 要素は

$$\sum_{l=1}^L \sum_{(i,j) \in K_l} \tilde{x}_{ij}^l - \sum_{l=1}^L \sum_{(j,i) \in K_l} \tilde{x}_{ji}^l \quad (12)$$

である。 $\sum_{l=1}^L \tilde{x}_{ij}^l$ を点 i から点 j に流れる流量とすると、(12) は点 i での流出量 - 流入量と解釈できる。

次に、すべての評価者が全一対比較を行う場合、つまり $|K_1| = \dots = |K_L| = |E| = n(n-1)/2$ の場合を考える。つまり、 $|K| = L|E|$ であり $\bar{K} = \emptyset$ である。このとき $AA^T + \mathbf{1}\mathbf{1}^T$ の対角要素は Ln であり、非対角要素は 0 である。また、 Ab の第 i 要素は、 $-\sum_{j=1}^{i-1} \sum_{l=1}^L \tilde{x}_{ji}^l + \sum_{j=i+1}^n \sum_{l=1}^L \tilde{x}_{ij}^l$ と書ける。ここで、 $\tilde{x}_{ji}^l + \tilde{x}_{ij}^l = 0$ より、 Ab の第 i 要素は $\sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^L \tilde{x}_{ij}^l$ となるので、以下の系を得る。

系 3.3 すべての評価者が全一対比較を行う場合、 $\tilde{\alpha}$ -重要度ベクトルは次のように与えられる。

$$\tilde{w}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \tilde{x}_{ij}^l \right\} + \frac{\tilde{\alpha}}{n}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (13)$$

系 3.3 の \tilde{w} を対数逆変換すれば、

$$w_i = \left(\alpha \prod_{j=1}^n z_{ij} \right)^{1/n}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (14)$$

が得られる。ただし、

$$z_{ij} = \left(\prod_{l=1}^L x_{ij}^l \right)^{1/L}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (15)$$

である。式 (14) において、 $w^T \mathbf{1} = 1$ であるように α をきめれば、いわゆる幾何平均法となることがわかる。また、式 (15) から、全一対比較を前提とした場合、複数の評価者による各一対比較の幾何平均値をもって、グループの一対比較値とすることの妥当性が示される。さらに、評価者が単独、すなわち $L = 1$ ならば、式 (14) は幾何平均法そのものである。

重複評価がなく、ある代替案間に対して一対比較されていない場合は、いわゆる不完全データを伴う AHP であり、 $\bar{K} \neq \emptyset$ かつ $|K| = |E|$ である。この時の一対比較グラフを G 、一対比較ネットワークを \mathcal{N} とする。重複評価がないので、得られた一対比較値群 $x_{ij}^l (i, j) \in K_l (l = 1, \dots, L)$ を $x_{ij} (i, j) \in K$ と記す。さらに、 $x_{ii} = 1, i = 1, \dots, n$ とし、 $x_{ji} = 1/x_{ij} (i, j) \in K$ とする。不完全データを伴う AHP での重要度導出法の 1 つであるハーカー法は導出すべき重要度 $w_i (i = 1, \dots, n)$ が存在するものとして、一対比較行列の第 (i, j) 要素が欠落しているならば第 (i, j) 要素に w_i/w_j を補完して解く方法である。つまり、 ξ_{ij} を第 (i, j) 要素として持つ一対比較行列 Ξ を補完モデル (16) により構成し、一対比較行列 Ξ に対して重要度ベクトルを算出する。

$$\xi_{ij} = \begin{cases} x_{ij} & (i, j) \notin \bar{K} \text{ である場合} \\ w_i/w_j & (i, j) \in \bar{K} \text{ である場合} \end{cases} \quad (16)$$

式 (16) の両辺に対数変換を行うと、

$$\tilde{\xi}_{ij} = \begin{cases} \tilde{x}_{ij} & (i, j) \in K \text{ である場合} \\ \tilde{w}_i - \tilde{w}_j & (i, j) \in \bar{K} \text{ である場合} \end{cases} \quad (17)$$

が得られる。ここで、式(17)に対応する一対比較グラフを G^* 、一対比較ネットワークを N^* とする。一対比較ネットワーク N^* は $(i, j) \in \bar{K}$ である点 i から点 j への枝を N に追加してその容量を $\tilde{w}_i - \tilde{w}_j$ として得られるものである。もしくは、グラフ G^* の $n \times n(n-1)/2$ の接続行列 A^* とカットベクトル $b^* \in R^{n(n-1)/2}$ はグラフ G の $n \times |E|$ の接続行列 A に新たに $(i, j) \in \bar{K}$ である点 i から点 j への枝に対応する列を追加し、同時にグラフ G のカットベクトル b に $\tilde{w}_i - \tilde{w}_j$ を追加したものである。したがって、いずれの解釈にしても、補完しない場合の問題(7)に冗長な情報を追加したものが、式(17)で得られる問題(7)であることがわかる。つまり、不完全データに対してハーカー法に倣った補完モデル(17)により構成された問題(7)から得られる重要度ベクトルと不完全データのままで問題(7)から得られる重要度ベクトルは一致するので、式(11)は幾何平均法におけるハーカー法と解釈することも可能である。

4 人事評価への適用

ソフトウェア開発では、生産性における個人差が数倍に留まらず数十倍に達するとさえいわれている。したがって、優秀な才能の獲得が不可欠であり、優秀な人材の獲得のためには、仕事のできる人に適切な報酬とチャンスが与えられるような、魅力的な雇用システムの確立が重要である。そのことは結局、従来型の年功給中心の人事システムの否定を意味する。かくして、能力評価中心の人事システムが重要となる[6]。能力評価中心の人事システムを実現するためには、被評価者に納得のゆく評価ができることが絶対条件である。したがって、評価者間で評価基準の合意形成が合理的になされなければならない。本事例は、あるソフトウェアハウス(A社)において、人事評価に本稿で提案された手法を適用した実験の報告である。結果は成功であり、本手法の適用結果は経営者にも現場技術者にもよく受け入れられた。

A社の人事評価は、半年毎に実施される。評価は対象者が該当する期間所属したプロジェクトのリーダー(かならずしも一人ではない)が、固有能力、業績、仕事振りの内訳の複数項目(11項目)について点数化し、項目毎の加重平均値を評価得点とする。

現実の人事評価の場面では、

1. 評価項目間の重み係数の決定
2. 評価項目毎の評価対象者間の相対評価

が評価する側の作業となる。

本稿の実験では、2.の評価対象者間の相対評価に対して、大規模AHP手法を適用する。評価対象者(AHPの枠組みでは代替案に相当する)間の相対評価においては、第1節で挙げたような問題が存在するばかりでなく、ある評価項目での対象者間の一対比較について、評価者が確信をもって評価を下すだけの自信がない場合も度々発生する。このように、確信をもって一対比較ができない代替案の組み合わせの存在は、一般的に想定される問題[4]である。複数の評価者によるAHPでは、全評価者がすべての代替案に対して精通しているわけではないので、この問題点は顕著に生じるであろう。

実験の第一段階は、4人のプロジェクトリーダーによって、ある評価項目に対する評価対象者間の一対比較を実施し、一対比較ネットワークを作成することである。結果を表3に示す。一対比較ネットワークを以下に図示する。ただし、本事例では言葉の尺度それぞれを表4で示すように2の指数倍として定量化した。この段階での一対比較グラフは4つの連結成分に分割される。人事評価においては、このようになることが普通であろう。第2段階としては、以下の2つの方法を提案する。

1. 代表要素抽出法: それぞれの連結成分から何人かづつの評価対象者を選択し、選択された対象者に対する一対比較ネットワークを作成する。
2. 階層化法: それぞれの連結成分そのものを評価対象とみなして、連結成分に対する一対比較ネットワークを作成する。

いずれの場合も、評価者はプロジェクトリーダー群よりも上位に属し、全プロジェクトを比較可能な評価者で

表 3: プロジェクトリーダーによるプロジェクトメンバーの一対比較

リーダーAによる一対比較			リーダーBによる一対比較		
XはYより	やや	優れている	RはSと		同じ程度だ
XはVより	かなり	優れている	RはTより	かなり	優れている
XはZより	やや	優れている	SはTより	やや	優れている
XはWより	かなり	優れている	リーダーCによる一対比較		
YはVより	かなり	優れている	MはLより	すごく	優れている
YはZと		同じ程度だ	MはJより	かなり	優れている
YはWより	やや	優れている	MはKより	やや	優れている
ZはVより	かなり	優れている	NはLより	かなり	優れている
WはVより	やや	優れている	NはJより	やや	優れている
ZはWより	やや	優れている	JはKと		同じ程度だ
リーダーDによる一対比較			MはNと		同じ程度だ
AはBより	かなり	優れている			

表 4: 言葉の尺度の定量化

同じだ	やや	かなり	すごく
2^0	2^1	2^2	2^3

ある必要がある。このようなプロジェクトリーダー群よりも上位に属した評価者を上位評価者と呼ぶ。

代表要素抽出法は、同じ部門内でプロジェクトチームが複数存在するようなとき意味を持つ。上位評価者は各プロジェクトを代表するメンバーを認識しており、それらのメンバー間の相対比較は可能である。したがって、プロジェクトを代表するメンバーを媒体として、全メンバーの間接比較を行うことができる。代表要素抽出法を採用する場合は、一対比較グラフ全体が連結になるように評価対象者を抽出する。つまり、第1段階で作られた一対比較ネットワークに代表要素抽出法で得られた一対比較の結果を追加することで、連結な一対比較ネットワークが完成する。得られた連結な一対比較ネットワークから、 α -重要度ベクトルを求めればよい。

階層化法は、一対比較グラフが異なる部門毎に連結成分となる場合に意味を持つ。階層化法を採用する場合は、組織全体への各部門の貢献度を尺度として、部門そのものの組織内での重要度を求める。第1段階で得られた部門毎の一対比較ネットワークから得られた α -重要度ベクトルと当該部門の重要度の積をとることで、個人の重要度が得られる。

本事例の場合は、ソフトウェアを作成する部門における、複数のプロジェクトチームに属するメンバーを評価対象としているから、代表要素抽出法を採用する。部門リーダーが作成した一対比較を表5に示す。最終的

表 5: 部門リーダーによる部門代表者の一対比較

MはXより	やや	優れている
MはRより	すごく	優れている
MはAと		同じ程度だ
XはRより	かなり	優れている
AはXより	やや	優れている
AはRより	すごく	優れている

な一対比較ネットワークを図3に示す。この一対比較ネットワークから算出した α -重要度ベクトルを正規化したベクトルとハーカー法による重要度ベクトルを計算し、その結果を表6に示す。

表 6: 大規模 AHP とハーカー法での重要度ベクトル

表内の数値は全て 10^{-2} の値を示す.

	V	W	X	Y	Z	R	S	T	J	K	L	M	N	A	B
ハーカー法	1.49	2.51	9.01	5.07	5.07	2.23	1.77	0.70	6.42	7.75	2.88	19.02	14.20	17.68	4.19
大規模 AHP	1.46	2.50	8.96	5.07	5.07	2.26	1.79	0.71	6.29	7.67	2.85	18.70	13.89	18.22	4.56

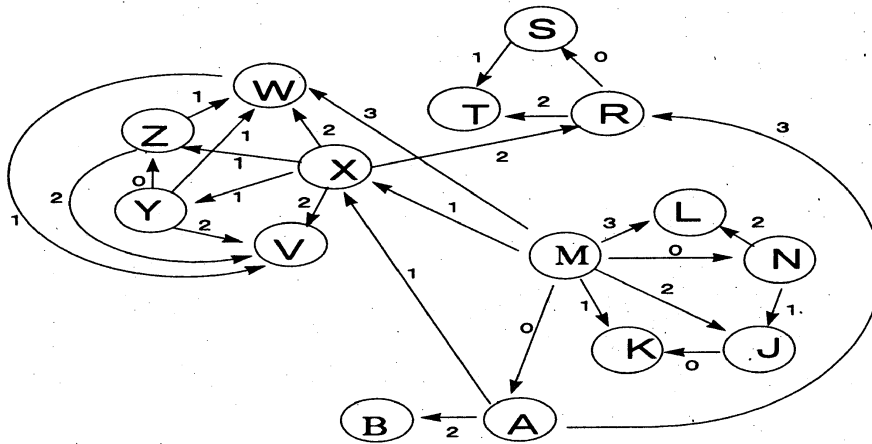


図 3: A 社における人事評価の一对比較ネットワーク

5 大規模 AHP のモデルの拡張例

大規模 AHP で得られた重要度ベクトルへの評価者の満足感を高める方法の一つとして、事前にメンバが重要度に望む性質、条件を調査して定式化し、制約として誤差最小化問題 (7) に付加することが考えられる。

本節では、第 4 節で述べた事例に即していくつかの制約条件を想定して、制約付き誤差最小化問題 (7) を数理計画モデルとして示す。第 4 節の事例における数理計画モデルの重要度ベクトルを算出する。 $x_{ij}^l, \tilde{x}_{ij}^l$ を評価した一对比較値、 $w_i/w_j, \tilde{w}_i - \tilde{w}_j$ を推定する一对比較値と呼ぶ。本稿の人事評価に対して以下の 3 つの条件を想定した。

条件 1 (集団一致の重視) 集団で一致した意見を否定するような推定をしてはならない。つまり、 (i, j) を評価した一对比較値すべてが「 i は j より同等以上である。」と意味するならば、 i は j より同等以上と推定されなければならない。

条件 2 (単独評価の尊重) 評価者の中で唯一人が評価できる一对比較の情報を無視して推定してはならない。つまり、 (i, j) を一对比較した評価者が 1 人である場合、評価した一对比較値 x_{ij}^l から推定する一对比較値 w_i/w_j のずれは評価の尺度で一定程度以内とする。

条件 3 (上位評価者の優越) 上位評価者の意見が下位の評価者の意見によって否定されるような推定をしてはいけない。評価した一对比較値の中で特に上位の評価者が評価した一对比較値を重要視して推定されなければならない。

3 つの条件を定式化するために、添字集合 S^1, S^2, S^3, S^4 を次のように定義する。

$$S^1 = \{(i, j, l_1) \mid (i, j) \in K_{l_1} \text{ かつ } (i, j) \in K_l \text{ であるすべての } l \text{ に対して } \tilde{x}_{ij}^{l_1}/|\tilde{x}_{ij}^{l_1}| = \tilde{x}_{ij}^l/|\tilde{x}_{ij}^l|\}$$

$$S^2 = \{(i, j, l_1) \mid (i, j) \in K_{l_1} \text{ かつ } l \neq l_1 \text{ であれば } (i, j) \notin K_l\}$$

$$S^3 = \{(i, j, l_1) \mid l_1 \text{ は 上位評価者でありかつ } (i, j) \in K_{l_1}\}$$

$$S^4 = \{(i, j, l_1) \mid l_1 \text{ は 上位評価者でなくかつ } (i, j) \in K_{l_1}\}.$$

条件 1 を制約に付加した問題は

$$(MP_1) \quad \begin{cases} \min & \|A\tilde{w} - b\|^2 \\ \text{s.t.} & \tilde{w}^T \mathbf{1} = \tilde{\alpha} \\ & \tilde{x}_{ij}^l(\tilde{w}_i - \tilde{w}_j) \geq 0 \quad (i, j, l) \in S^1 \end{cases}$$

である. ここで, $\tilde{\alpha}$ は正規化条件のパラメータである. 条件 1, 2, 3 を同時に考慮した問題は

$$(MP_2) \quad \begin{cases} \min & \|A\tilde{w} - b\|^2 \\ \text{s.t.} & \tilde{w}^T \mathbf{1} = \tilde{\alpha} \\ & \tilde{x}_{ij}^l(\tilde{w}_i - \tilde{w}_j) \geq 0 \quad (i, j, l) \in S^1 \\ & |(\tilde{w}_i - \tilde{w}_j) - \tilde{x}_{ij}^l| \leq \delta_1 \quad (i, j, l) \in S^2 \\ & |(\tilde{w}_i - \tilde{w}_j) - \tilde{x}_{ij}^l| \leq \delta_2 \quad (i, j, l) \in S^3 \\ & |(\tilde{w}_i - \tilde{w}_j) - \tilde{x}_{ij}^l| \leq \delta_3 \quad (i, j, l) \in S^4 \end{cases}$$

である. ただし, $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ は非負のパラメータで, $\delta_2 < \delta_3$ である.

本稿の事例では, 一対比較ネットワークでは並列枝が存在しないので, $S^1 = S^2 = \{(i, j, l) \mid (i, j) \in K, l = A, \dots, D\}$, $S^3 = \{(i, j, D) \mid (i, j) \in K_D\}$, $S^4 = S^1 \setminus S^3$ である. 事例での問題 $(MP_1), (MP_2)$ では $\|\cdot\|$ をユークリッドノルムとし, $\delta_1 = \delta_3, \tilde{\alpha} = \delta_2 = 0$ とした.

問題 (MP_1) を解くことで得た重要度ベクトルと $\delta_1 = 0.5, 0.6, 0.7, \infty$ と変化させた問題 (MP_2) を解くことで得た重要度ベクトルを表 7 で示す. ただし, 重要度ベクトルはそれぞれの問題の最適解に対して要素の総和が 1 となるような正規化を施したものである. 表 6 での大規模 AHP の重要度ベクトルは条件 1 を破ることはないので, 問題 (MP_1) の解と一致している. 本事例で求めたいずれの重要度ベクトルも表 6, 7 で示したようにほぼ一致している. これは誤差最小化問題 (7) から得た重要度ベクトルに対して本事例に参加した評価者が不満を抱かなかったことを裏付けるものとして解釈できよう.

表 7: 数理計画モデルから得た重要度ベクトル

表内の数値は全て 10^{-2} の値を示す.

	V	W	X	Y	Z	R	S	T	J	K	L	M	N	A	B
MP_1	1.46	2.50	8.96	5.07	5.07	2.26	1.79	0.71	6.29	7.67	2.85	18.70	13.89	18.22	4.56
$\delta_1 = \infty$	1.43	2.32	9.27	4.97	4.97	2.32	1.84	0.73	6.24	7.61	2.82	18.54	13.77	18.54	4.64
$\delta_1 = 0.7$	1.43	2.32	9.27	4.97	4.97	2.32	1.84	0.73	6.24	7.61	2.82	18.54	13.78	18.54	4.64
$\delta_1 = 0.6$	1.52	2.31	9.24	5.07	5.07	2.31	1.83	0.73	6.22	7.58	2.82	18.48	13.73	18.48	4.62
$\delta_1 = 0.5$	1.63	2.30	9.20	5.17	5.17	2.30	1.83	0.72	6.20	7.56	2.81	18.42	13.68	18.41	4.60

6 おわりに

本稿では, 代替案もしくは評価項目の数が多く, かつ評価者が複数であるような意思決定の場面で, 適切に適応可能なように AHP の枠組みの拡張を試みた. 提案した枠組み「大規模 AHP」は, 既存の AHP の自然な拡張であることを示し, 人事評価などの事例でその有効性を確かめた. また, 大規模 AHP は適用事例に応じて手軽に拡張, 変更できることも示した.

本稿の目的は大規模 AHP の枠組みの確立であり, 本枠組みにおける重要度算出法に関しては, 今後様々な検討, 適用事例での検証を行う必要がある. さらに, Saaty の定義した整合度に対応した, 重要度に対する信頼性の尺度を確立する必要がある. 幾何平均法においては残差平方和を整合の尺度になり得るが, 大規模 AHP では, 例えば一対比較グラフが木であれば, 推定した一対比較値と評価した一対比較値の残差は 0 となるので, 残差をそのまま信頼性の尺度には出来ない. したがって, 一対比較グラフの位相構造を取り込んだ議論が必要である.

参考文献

- [1] I. Basak and T.L. Saaty: Group decision making using the analytic hierarchy process, *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. 17 (1993) 101-109.
- [2] A. Ben-Israel and T.N.E. Greville: *Generalized inverses: theory and applications*, John Wiley & Sons, 1974.
- [3] R.W. Floyd: Algorithm 97: shortest path, *Communication of ACM*, Vol. 5 (1962) 345.
- [4] P.T. Harker: Alternative modes of questioning in the analytic hierarchy process, *Mathematical Modelling*, Vol. 9 (1987) 353-360.
- [5] 伊理正夫, 藤重悟, 大山達雄: グラフ・ネットワーク・マトロイド, 産業図書, 1986.
- [6] 社団法人情報サービス産業協会: 情報サービス産業における新雇用システムの提言, 平成6年度情報サービス産業雇用高度化事業に関する研究報告書(1), 1995.
- [7] 仁科健, 柴山忠雄: 一対比較における固有ベクトル法と対数最小二乗法の比較, 品質管理, Vol. 22 (1992) 115-123.
- [8] 大村雄史: AHPの業績評価への応用, オペレーションズ・リサーチ, Vol. 40 (1995) 404-410.
- [9] T.L. Saaty: Group decision making and the AHP, *The Analytic Hierarchy Process*, Springer-Verlag, 1989, 59-67.
- [10] T.L. Saaty: Eigenvector and logarithmic least squares, *European Journal of Operational Research*, Vol. 48 (1990) 156-160.
- [11] T.L. Saaty and L.G. Vargas: Comparison of eigenvalue, logarithmic least squares and least squares methods in estimating ratio, *Mathematical Modelling*, Vol. 48 (1984) 305-324.
- [12] 杉山学, 山田善靖, 八巻直一: 合意形成モデルを用いたグループAHP, *Journal of the Operations Research of Japan*, Vol. 40 (1997) 236-244.
- [13] S. Shiraishi, T. Obata and M. Daigo: Properties of a positive reciprocal matrix and their application to AHP, Working paper No. 168, Faculty of Economics, Toyama University, 1997.
- [14] E. Takeda and P.L. Yu: Assessing priority weights from subsets of pairwise comparisons in multiple criteria optimization problems, *European Journal of Operational Research*, Vol. 86 (1995) 315-331.
- [15] 刀根薫: ゲーム感覚意思決定法-AHP入門, 日科技連, 1986.
- [16] 八巻直一, 関谷和之: ネットワーク型評価モデルと重要度ベクトルの導出について, 1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会アブストラクト集, 1997, 114-115.
- [17] 八巻直一, 嶋田駿太郎: 人事評価にグループAHPを適用する, オペレーションズ・リサーチ, Vol. 42 (1997) 367-370.
- [18] 八巻直一, 山田善靖, 杉山学, 洪時宗: 人事評価における合意形成支援ソフト, 1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会アブストラクト集, 1996, 84-85.
- [19] S. Warshall: A theorem on boolean matrices, *Journal of ACM*, Vol. 9 (1962) 11-12.